I. Wyrażenia liczbowe i algebraiczne

Oznaczenia

$\mathbb{N} \stackrel{def}{=} \{1, 2, \dots\}$ – zbiór liczb naturalnych

$\mathbb{Z} \stackrel{def}{=} \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$ – zbiór liczb całkowitych

$\{\dots, -4, -2, 0, 2, 4, \dots\} = \{2k : k \in \mathbb{Z}\}$ – zbiór liczb parzystych

$\{\dots, -3, -1, 1, 3, \dots\} = \{2k - 1 : k \in \mathbb{Z}\} = \{2k + 1 : k \in \mathbb{Z}\}$ – zbiór liczb nieparzystych

$\mathbb{Q} \stackrel{def}{=} \left\{\frac{p}{q} : p \in \mathbb{Z},\ \ q \in \mathbb{N}\right\}$ – zbiór liczb wymiernych

$\mathbb{IQ}$ - zbiór liczb niewymiernych

$\mathbb{R}$ - zbiór liczb rzeczywistych

Przedziały

Dla $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$:

$(a, b) \stackrel{def}{=} \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$ – przedział otwarty o końcach a i b,

$[a, b] \stackrel{def}{=} \{x \in \mathbb{R} : a \leqslant x \leqslant b\}$ – przedział domknięty o końcach a i b,

$(a, b] \stackrel{def}{=} \{x \in \mathbb{R} : a < x \leqslant b\}$ – przedział lewostronnie otwarty (prawostronnie domknięty) o końcach a i b,

$[a, b) \stackrel{def}{=} \{x \in \mathbb{R} : a \leqslant x < b\}$ – przedział lewostronnie domknięty (prawostronnie otwarty) o końcach a i b,

$(a, +\infty) \stackrel{def}{=} \{x \in \mathbb{R} : a < x < +\infty\}$,

$[a, +\infty) \stackrel{def}{=} \{x \in \mathbb{R} : a \leqslant x < +\infty\}$,

$(-\infty, b) \stackrel{def}{=} \{x \in \mathbb{R} : -\infty < x < b\}$,

$(-\infty, b] \stackrel{def}{=} \{x \in \mathbb{R} : -\infty < x \leqslant b\}$,

$(-\infty, +\infty) \stackrel{def}{=} \{x \in \mathbb{R} : -\infty < x < +\infty\} = \mathbb{R}$.

Potęga

$$a^0 \stackrel{def}{=} 1, \quad a \neq 0$$

$$a^1 \stackrel{def}{=} a, \quad a \in \mathbb{R}$$

$$a^n \stackrel{def}{=} a^{n-1} \cdot a, \quad a \in \mathbb{R}, \quad n \in \mathbb{N}$$

$$a^n = \underbrace{a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ razy}}, \quad a \in \mathbb{R}, \quad n \in \mathbb{N}$$

$$a^{-n} \stackrel{def}{=} \frac{1}{a^n}, \quad a \neq 0, \quad n \in \mathbb{N}$$

$$\sqrt[n]{a} = p \stackrel{def}{\Leftrightarrow} p^n = a, \quad a \geq 0, \quad p \geq 0, \quad n \in \mathbb{N}$$

$$\sqrt[2n-1]{a} \stackrel{def}{=} -\sqrt[2n-1]{|a|}, \quad a < 0, \quad n \in \mathbb{N}$$

$$a^{\frac{1}{n}} \stackrel{def}{=} \sqrt[n]{a}, \quad a \geq 0, \quad n \in \mathbb{N}$$

$$a^{\frac{m}{n}} \stackrel{def}{=} \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m, \quad a > 0, \quad m \in \mathbb{Z}, \quad n \in \mathbb{N}$$

$$a^x \stackrel{def}{=} \lim_{n\to\infty} a^{x_n}, a > 0, \quad x \in \mathbb{IQ}, \quad x_n \in \mathbb{Q}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad \lim_{n\to\infty} x_n = x$$

Jeśli $a, b > 0$, $x, y \in \mathbb{R}$, to:

$$a^{x+y} = a^x a^y,$$

$$a^{x-y} = \frac{a^x}{a^y},$$

$$(a^x)^y = a^{xy} = a^{yx} = (a^y)^x,$$

$$(ab)^x = a^x b^x,$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}$$

(ograniczenia na a, b zależą od wykładników x, y).

Wzory skróconego mnożenia

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

$$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$$

$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$$

$$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$$

1. Obliczyć:

a) $\dfrac{\left(140\frac{7}{30}-138\frac{5}{12}\right):18\frac{1}{6}}{1:500}$, **b)** $\dfrac{(0,3-0,15):0,3}{(1,88+2,12)\cdot 0,125}$,

c) $\dfrac{\left(1\frac{11}{18}+1\frac{19}{24}\right)\cdot\frac{16}{49}}{37\frac{1}{3}:3,5-3\frac{5}{6}}$, **d)** $3\dfrac{1}{8}:\left[\left(4\dfrac{5}{12}-3\dfrac{13}{24}\right)\cdot\dfrac{4}{7}+\left(3\dfrac{1}{18}-2\dfrac{7}{12}\right)\cdot 1\dfrac{10}{17}\right]$,

e) $\dfrac{\left[5\frac{1}{84}+\frac{31}{63}-\left(2\frac{31}{252}+3\frac{5}{21}\right)\right]\cdot\left[24:\left(1\frac{1}{2}:4\frac{3}{8}\right)\right]}{\left(1\frac{15}{26}+\frac{1}{39}-\frac{7}{156}\right):\left(20\frac{1}{4}:26\right)}$.

2. Obliczyć:

a) 4% liczby 62, **b)** 3% liczby 20, **c)** 70% liczby 150,

d) $\dfrac{1}{3}$% liczby 15, **e)** 110% liczby 7.

3. Znaleźć liczbę, której

a) 15% jest równe 8, **b)** 7% jest równe 3, 5, **c)** 30% jest równe 4,

d) 75% jest równe 18, **e)** 200% jest równe 10.

4. Obliczyć, jaki procent liczby

a) 5 stanowi 2, 5, **b)** 169 stanowi 13, **c)** 1000 stanowi 20,

d) 60 stanowi 80, **e)** 15 stanowi 45.

5. Obliczyć:

a) $\left[\dfrac{3}{4}-\left(\dfrac{2}{3}\right)^{-1}\right]^{-1}$, **b)** $\dfrac{5^2\cdot 5^{-1}-8^0}{2^{-2}}$, **c)** $\dfrac{4^{-1}-3\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{-2}}{5-\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}}$,

d) $\left[4^{-\frac{1}{4}}+\left(\dfrac{1}{2^{-\frac{3}{2}}}\right)^{-\frac{4}{3}}\right]\cdot\left[4^{-0,25}-(2\sqrt{2})^{-\frac{4}{3}}\right]$,

e) $\sqrt{\dfrac{32}{72}}$, **f)** $\sqrt{\dfrac{0,24\cdot 6\cdot 4,9}{0,1}}$, **g)** $\sqrt{2,9^2-0,34^2}$,

h) $\sqrt[3]{\dfrac{189}{56}}$, **i)** $\sqrt[3]{-\dfrac{750}{162}}$, **j)** $\sqrt[3]{10}\cdot\sqrt[3]{0,5}\cdot\sqrt[3]{12,5}\cdot\sqrt[3]{16}$.

6. Usunąć niewymierności z mianowników ułamków:

a) $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$, **b)** $\dfrac{1}{\sqrt{3}-1}$, **c)** $\dfrac{1}{2+\sqrt{5}}$, **d)** $\dfrac{20}{\sqrt{7}-\sqrt{5}+\sqrt{2}}$,

e) $\dfrac{12}{\sqrt{15}-\sqrt{6}+\sqrt{35}-\sqrt{14}}$, **f)** $\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}$, **g)** $\dfrac{1}{\sqrt[3]{3}-2}$, **h)** $\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{3}}$,

i) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{15}+\sqrt[3]{25}}$, **j)** $\dfrac{1}{\sqrt[3]{36}-\sqrt[3]{42}+\sqrt[3]{49}}$.

7. Rozłożyć na czynniki wyrażenia:

a) a^2b-4ab^2, **b)** $xy+yz+x+z$, **c)** $ab+a+b+1$, **d)** $a^2+2ab+b^2-9$,

e) m^4+m^3+m+1, **f)** $m^4+m^3+m^2+m$, **g)** $a^5-a^3+a^2-1$.

8. Uprościć wyrażenia:

a) $\dfrac{10x^2-10y^2}{5x-5y}$, **b)** $\dfrac{3}{a+1}+\dfrac{1}{1-a}-\dfrac{2a}{1-a^2}$, **c)** $\dfrac{x^2+\frac{1}{x}}{x+\frac{1}{x}-1}$,

d) $\dfrac{1}{(x+y)^2}\left(\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{y^2}\right)+\dfrac{2}{(x+y)^3}\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}\right)$,

e) $\dfrac{2}{a}-\left(\dfrac{a+1}{a^3-1}-\dfrac{1}{a^2+a+1}-\dfrac{2}{1-a}\right):\dfrac{a^3+a^2+2a}{a^2-1}$,

f) $(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})$, **g)** $\dfrac{m-n}{\sqrt{m}-\sqrt{n}}$, **h)** $(\sqrt{a^2b}+\sqrt{ab^2}):\sqrt{ab}$,

i) $\left(\sqrt{a}-\sqrt{\dfrac{a}{2}}\right):\sqrt{a}$, **j)** $\dfrac{a-b}{\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}}+\dfrac{a+b}{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}}$.

9. Obliczyć wartość wyrażenia

a) $\dfrac{x^{-1}-a^{-1}}{a^{-1}-b(ax)^{-1}}$ dla $x=\dfrac{1}{(a+b)^{-1}}-\left(\dfrac{a+b}{a^2+b^2}\right)^{-1}$,

b) $\left[1-\dfrac{1-(4+x^2)}{4x}\right]\dfrac{1+(2+x)^{-1}}{1-(2+x)^{-1}}$ dla $x=\sqrt{3}$,

c) $\left[a^{-\frac{3}{2}}b(ab^{-2})^{-\frac{1}{2}}(a^{-1})^{-\frac{2}{3}}\right]^3$ dla $a=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, $b=\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}$.

II. Funkcja liniowa

Ustalmy $a, b \in \mathbb{R}$. Funkcję $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ określoną wzorem

$$f(x)=ax+b,\quad x\in\mathbb{R}$$

nazywamy funkcją liniową o współczynniku kierunkowym a i wyrazie wolnym b. Funkcję liniową nazywamy funkcją pierwszego stopnia, gdy $a\neq 0$.

Jeśli $a=0$, to f jest stała. Jeśli $a<0$, to f jest malejąca. Jeśli $a>0$, to f jest rosnąca.

Wykresem funkcji liniowej jest prosta nachylona do osi Ox pod kątem α takim, że $\operatorname{tg}\alpha = a$.

Jeśli $a \neq 0$, to funkcja liniowa ma miejsce zerowe

$$x_0 = -\frac{b}{a}.$$

Jeśli $a = 0$, $b = 0$, to funkcja liniowa jest stale równa zeru. Jeśli $a = 0$, $b \neq 0$, to funkcja liniowa nie ma miejsc zerowych.

10. Rozwiązać równania i nierówności:

a) $\dfrac{3x-1}{5} - \dfrac{13-x}{2} = \dfrac{7x}{3} - \dfrac{11(x+3)}{6}$, **b)** $6(t^2+t+1) = (t+1)^3 - (t-1)^3$,

c) $(x^2+2x-3)(x^2-4x+8) = x^3(x-2) - 3(x^2-1) + 1$,

d) $\dfrac{x^2-1}{x-1} = 2x$, **e)** $\dfrac{3x+5}{2x+4} = \dfrac{9x+10}{6x+7}$,

f) $\dfrac{x}{3} - \dfrac{x}{4} + 7 > 6 + \dfrac{x}{5}$, **g)** $2(x-1) + (x-1)^2 > (x+1)^2$.

11. Rozwiązać układy równań:

a) $\begin{cases} \frac{x}{2} - \frac{y}{3} = 1 \\ \frac{2x-1}{2} - \frac{3y-1}{3} = \frac{5}{6} \end{cases}$, **b)** $\begin{cases} \frac{3x-1}{5} + 3y - 4 = 15 \\ \frac{3y-5}{6} + 2x - 8 = \frac{23}{3} \end{cases}$,

c) $\begin{cases} 3x - 2y = 4 \\ 2x + 7y = 1 \end{cases}$, **d)** $\begin{cases} 3x - 2y = 1 \\ 6x - 4y = 2 \end{cases}$, **e)** $\begin{cases} x + y = 5 \\ 2x + 2y = 1 \end{cases}$,

f) $\begin{cases} 5x + y = 17 \\ x - 5y = 19 \end{cases}$, **g)** $\begin{cases} 5x - 2y = 9 \\ -15x + 6y = 10 \end{cases}$, **h)** $\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 5 \\ \frac{3}{x} - \frac{5}{y} = -9 \end{cases}$,

i) $\begin{cases} \frac{3}{x+y} + \frac{4}{x-y} = 7 \\ \frac{1}{x+y} + \frac{1}{x-y} = 2 \end{cases}$, **j)** $\begin{cases} 2x + y + 3z = 13 \\ x + y + z = 6 \\ 3x + y + z = 8 \end{cases}$.

12. Rozwiązać układy nierówności:

a) $3x + 2 < 4x - 1 < 5x - 6$, **b)** $3x + 2 > 4x - 1 > 5x - 6$,

c) $\begin{cases} 2 - \frac{3}{4}x < \frac{2+x}{3} \\ \frac{x+2}{3} + 1 > \frac{3x-4}{2} \end{cases}$.

III. Funkcja kwadratowa

Ustalmy $a \neq 0$, $b, c \in \mathbb{R}$. Funkcję $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ określoną wzorem

$$f(x) = ax^2 + bx + c, \quad x \in \mathbb{R}$$

nazywamy funkcją kwadratową (drugiego stopnia lub trójmianem kwadratowym).

Każdą funkcję kwadratową można zapisać w postaci kanonicznej, a mianowicie

$$ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a},$$

gdzie

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

nazywamy wyróżnikiem funkcji kwadratowej.

Wykresem funkcji kwadratowej jest parabola o wierzchołku $\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right)$ i osi symetrii $x = -\frac{b}{2a}$. Jeśli $a < 0$, to ramiona paraboli skierowane są w dół i funkcja f ma w punkcie $x_{\max} = -\frac{b}{2a}$ maksimum równe $f(x_{\max}) = -\frac{\Delta}{4a}$. Jeśli $a > 0$, to ramiona paraboli skierowane są w górę i funkcja f ma w punkcie $x_{\min} = -\frac{b}{2a}$ minimum równe $f(x_{\min}) = -\frac{\Delta}{4a}$.

Jeśli $\Delta < 0$, to funkcja kwadratowa nie ma miejsc zerowych i przyjmuje wartości ujemne, gdy $a < 0$ oraz wartości dodatnie, gdy $a > 0$. Jeśli $\Delta = 0$, to funkcja kwadratowa ma miejsce zerowe

$$x_0 = -\frac{b}{2a}$$

oraz

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_0)^2.$$

Jeśli $\Delta > 0$, to funkcja kwadratowa ma dwa miejsca zerowe

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}, \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

oraz

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2).$$

Wzory Viète'a. Jeśli x_1, x_2 są pierwiastkami funkcji kwadratowej $ax^2 + bx + c$, to

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}, \quad x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}.$$

13. Sprowadzić trójmiany kwadratowe do postaci kanonicznej:

a) $x^2 - 5$, **b**) $-x^2 + 6$, **c**) $x^2 - 5x$, **d**) $-3x^2 + 12x$,

e) x^2+x+1, **f)** x^2-x+1, **g)** x^2+6x+8, **h)** $2x^2+3x+1$,

i) $2x^2-8x+7$, **j)** $-x^2+x+2$.

14. Rozwiązać równania i nierówności:

a) $-x^2+x+6=0$, **b)** $(x-4)^2=25$, **c)** $(x^2+x)^2-1=0$,

d) $x^4-1=0$, **e)** $x^4+3x^2+2=0$, **f)** $x^4-10x^2+9=0$,

g) $2x(x-3)=7(x-3)$, **h)** $\dfrac{x^2}{x-1}+1=\dfrac{x}{x-1}$, **i)** $\dfrac{2x+1}{3-x}=\dfrac{4-x}{x+1}$,

j) $\dfrac{3x}{x-1}-\dfrac{2x}{x+2}=\dfrac{3x-6}{(x-1)(x+2)}$, **k)** $\dfrac{18x+7}{x^3-1}=\dfrac{30}{x^2-1}-\dfrac{13}{x^2+x+1}$,

l) $x^2-3x+2<0$, **m)** $-x^2+4x-4<0$,

n) $3x^2+8x\leqslant 0$, **o)** $x^2+x+1\geqslant 0$.

15. Rozwiązać układy równań:

a) $\begin{cases} x^2+y=10 \\ x+y=4 \end{cases}$, **b)** $\begin{cases} 2x^2-y+3x-5=0 \\ 2x-y+5=0 \end{cases}$,

c) $\begin{cases} x^2+y^2=25 \\ x-y=1 \end{cases}$, **d)** $\begin{cases} x+y=5 \\ xy=4 \end{cases}$, **e)** $\begin{cases} xy=5 \\ 2y-x-3=0 \end{cases}$,

f) $\begin{cases} x-y=7 \\ xy=18 \end{cases}$, **g)** $\begin{cases} x^2+y^2=58 \\ xy=-21 \end{cases}$, **h)** $\begin{cases} x^2-y^2=9 \\ xy=20 \end{cases}$,

i) $\begin{cases} x^2+y^2=58 \\ 2xy=42 \end{cases}$, **j)** $\begin{cases} x^2+y^2=25 \\ y=x^2-13 \end{cases}$.

IV. Wielomian. Funkcja wymierna

Wielomian. Ustalmy $n\in\mathbb{N}\cup\{0\}$ oraz $a_0,a_1,\ldots,a_n\in\mathbb{R}$, $a_n\neq 0$. Funkcję $W\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ określoną wzorem

$$W(x)\overset{def}{=}a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0,\ \ x\in\mathbb{R}$$

nazywamy wielomianem zmiennej x stopnia n o współczynnikach $a_0,a_1,\ldots,a_n$. Współczynnik a_0 nazywamy wyrazem wolnym. Funkcję stałą $W\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ określoną wzorem

$$W(x)\overset{def}{=}0,\ x\in\mathbb{R}$$

nazywamy wielomianem zerowym. Wielomian zerowy nie ma stopnia.

Twierdzenie o rozkładzie wielomianu. Jeśli $W, P\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ są wielomianami i P nie jest wielomianem zerowym, to istnieją wielomiany $Q, R\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takie, że

$$W(x) = Q(x) \cdot P(x) + R(x), \quad x \in \mathbb{R},$$

przy czym albo R jest wielomianem zerowym, albo stopień wielomianu R jest mniejszy od stopnia wielomianu P.

Pierwiastek wielomianu. Liczbę a nazywamy pierwiastkiem wielomianu W, gdy $W(a) = 0$.

Pierwiastek k-krotny wielomianu. Niech $k \in \mathbb{N}$. Liczbę a nazywamy pierwiastkiem k-krotnym wielomianu, gdy wielomian ten jest podzielny przez $(x-a)^k$ i nie jest podzielny przez $(x-a)^{k+1}$.

Twierdzenie Bézouta. Liczba a jest pierwiastkiem wielomianu W wtedy i tylko wtedy, gdy $x - a$ dzieli $W(x)$.

Twierdzenie o pierwiastkach całkowtych i wymiernych wielomianu. Ustalmy $n \in \mathbb{N}$. Niech $W\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ określone wzorem

$$W(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0, \quad x \in \mathbb{R}$$

będzie wielomianem stopnia n o współczynnikach całkowitych $a_0, a_1, \ldots, a_n$ takich, że $a_0 \cdot a_n \neq 0$. Wówczas:

(i) jeśli liczba całkowita $p \neq 0$ jest pierwiastkiem wielomianu W, to p jest podzielnikiem wyrazu wolnego a_0;

(ii) jeśli liczba wymierna $\frac{p}{q}$, gdzie $p \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, $q \in \mathbb{N}$, $\mathrm{NWD}\,(p,q) = 1$, jest pierwiastkiem wielomianu W, to p jest podzielnikiem wyrazu wolnego a_0, a q jest podzielnikiem wyrazu a_n stojącego przy najwyższej potędze zmiennej.

Twierdzenie o pierwiastkach wielomianu stopnia n. Każdy wielomian n-tego stopnia ma co najwyżej n różnych pierwiastków.

Twierdzenie o rozkładzie wielomianu na czynniki liniowe. Niech $n \in \mathbb{N}$. Jeśli $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ są pierwiastkami wielomianu

$$W(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0, \quad x \in \mathbb{R}$$

stopnia n, to

$$W(x) = a_n (x - x_1) \cdot \ldots \cdot (x - x_n), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Twierdzenie o rozkładzie wielomianu na czynniki. Każdy wielomian różny od wielomianu zerowego jest iloczynem czynników co najwyżej drugiego stopnia.

Funkcja wymierna. Niech P, Q będą wielomianami, a $D_f = \{x \in \mathbb{R} : Q(x) \neq 0\}$. Funkcję $f\colon D_f \to \mathbb{R}$ określoną wzorem

$$f(x) \overset{def}{=} \frac{P(x)}{Q(x)}, \;\; x \in D_f$$

nazywamy funkcją wymierną.

16. Obliczyć

$$W(0), \;\; W(1), \;\; W(-1), \;\; W(\sqrt{2}), \;\; W(-\sqrt{2}),$$

jeśli:

a) $W(x) = x^3 + 3x^2 - 5x + 1$, **b)** $W(x) = x^3 - 2x^2 - x - 3$,

c) $W(x) = x^4 - 1$, **d)** $W(x) = x^4 - x^3 + x^2 - x$,

e) $W(x) = x^5 + 2x^4 + x^3 - 2x^2 - x + 1$.

17. Obliczyć

$$P(x) + Q(x), \;\; P(x) - Q(x), \;\; P(x) \cdot Q(x), \;\; P(x) : Q(x),$$

jeśli:

a) $P(x) = x^3 + x - 2, \;\; Q(x) = x - 1$,

b) $P(x) = x^3 + 2x^2 - 3x - 10, \;\; Q(x) = x - 2$,

c) $P(x) = x^5 + x + 2, \;\; Q(x) = x + 1$,

d) $P(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6, \;\; Q(x) = x^2 - 5x + 6$,

e) $P(x) = x^4 + 3x^3 - 12x^2 - 13x - 15, \;\; Q(x) = x^2 + x + 1$.

18. Rozwiązać równania i nierówności:

a) $x^3 - \dfrac{1}{2}x^2 - 2x + 1 = 0$, **b)** $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$,

c) $8x^3 - 4x^2 - 2x + 1 = 0$, **d)** $x^4 + 4x^3 - 25x^2 - 16x + 84 = 0$,

e) $x^4 - 5x^3 + 6x^2 - 5x + 1 = 0$, **f)** $x^5 - 2x^4 - 13x^3 + 26x^2 + 36x - 72 = 0$,

g) $x^5 - 4x^4 - 6x^3 + 16x^2 + 29x + 12 = 0$, **h)** $x^6 - 8x^3 + 15 = 0$,

i) $x^8 - 16 = 0$, **j)** $\dfrac{x^3 - 4x}{x^2 - 7x + 10} = 0$,

k) $2\left(x + \dfrac{1}{x}\right)^2 - 9\left(x + \dfrac{1}{x}\right) + 10 = 0$, **l)** $\dfrac{x^2 - 3x + 2}{x - 3} = x^2 - 3x + 2$,

m) $\dfrac{1}{x+1} + \dfrac{x}{x+2} + \dfrac{1}{x+3} = 1$, **n)** $2x^3 - x^2 - 25x - 12 \leqslant 0$,

o) $x^3 - 5x^2 + 10x - 12 < 0$, **p**) $x^2 \geqslant x^4$, **q**) $x^2 \leqslant x^4$,

r) $(3x^2 - 13x + 4)(4x^2 + 12x + 9) \leqslant 0$, **s**) $(2x - 5)(x^2 - 4)(x^3 + 8) \leqslant 0$,

t) $\dfrac{1}{x} > x$, **u**) $x + \dfrac{2}{x} > 3$, **v**) $\dfrac{11x - 1}{x^2} > 10$, **w**) $\dfrac{5 - x}{3 - x} < \dfrac{3x - 1}{2 - x}$,

x) $\dfrac{x - 2}{x + 2} \geqslant \dfrac{2x - 3}{4x - 1}$, **y**) $\dfrac{(x - 1)^2(x - 2)^3}{(x - 3)^4} > 0$.

19. Rozwiązać układy równań:

a) $\begin{cases} x^2 + 2y^2 - 3 = 0 \\ 2x^2 - y^2 - 1 = 0 \end{cases}$, **b**) $\begin{cases} x^2 + y^2 + x + y = 62 \\ x^2 - y^2 + x - y = 50 \end{cases}$,

c) $\begin{cases} x(x - y - 3) = 3(x - y - 3) \\ x^2(y + 1) - y^2(x + 1) = xy + 2y + 1 \end{cases}$,

d) $\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{3}{2} \\ \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = \frac{5}{4} \end{cases}$, **e**) $\begin{cases} \frac{x}{6} + \frac{4}{y} = 2 \\ \frac{18}{x} + \frac{y}{2} = 5 \end{cases}$.

V. Wartość bezwzględna liczby rzeczywistej

$$|x| \overset{def}{=} \begin{cases} x & , \quad x \geqslant 0 \\ -x & , \quad x < 0 \end{cases}$$

Dla $x, y \in \mathbb{R}$:

$$|x| \geqslant 0,$$

$$|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0,$$

$$|x| = |-x|,$$

$$\sqrt{x^2} = |x|,$$

$$|xy| = |x||y|,$$

$$\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}, \quad y \neq 0.$$

Dla $c > 0$:

$$|x| = c \Leftrightarrow x = -c \lor x = c,$$

$$|x| < c \Leftrightarrow -c < x < c,$$

$$|x| > c \Leftrightarrow x < -c \lor x > c.$$

20. Rozwiązać równania i nierówności:

a) $|x+3| = 0$, **b**) $|x-1| = 2$, **c**) $||x-1|+2| = 1$, **d**) $||3x-2|-1| = 2$,

e) $|x-3|+|x+4|=9$, **f**) $\sqrt{x^2}+x=4$, **g**) $|x+1|<3$, **h**) $|x-2|>5$,

i) $\left|\dfrac{2x-1}{x+2}\right| \leqslant 4$, **j**) $\left|\dfrac{x^2-5x+4}{x^2-4}\right| \leqslant 1$, **k**) $\left|\dfrac{2x-3}{x^2-1}\right| \geqslant 2$,

l) $|x-1|+|x-5|>8$, **m**) $|2x-1|<|x+3|$, **n**) $|x|>\dfrac{1}{x}$,

o) $\sqrt{x^2} \geqslant x+2$.

VI. Funkcja potęgowa

Ustalmy $\alpha \in \mathbb{R}$. Funkcję $f\colon (0,+\infty) \to \mathbb{R}$ określoną wzorem

$$f(x) = x^{\alpha}, \quad x > 0$$

nazywamy funkcją potęgową o wykładniku α. Jeśli $\alpha < 0$, to f jest malejąca. Jeśli $\alpha = 0$, to f jest stała. Jeśli $\alpha > 0$, to f jest rosnąca.

Dla pewnych α dziedziną funkcji potęgowej mogą być zbiory $\mathbb{R}$, $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ oraz $[0,+\infty)$.

21. Rozwiązać równania i nierówności:

a) $\sqrt{x+3}=3$, **b**) $x+\sqrt{10x+6}=9$, **c**) $x=15+\sqrt{9+8x-x^2}$,

d) $\sqrt{x+3}+\sqrt{x}=3$, **e**) $\sqrt[3]{x+2}=\sqrt{x+2}$, **f**) $2\sqrt[3]{x^2}-5\sqrt[3]{x}=3$,

g) $\sqrt{2x-1}>2$, **h**) $\sqrt{\dfrac{3x-4}{3-x}}>1$, **i**) $\sqrt{x^4-x^2} \leqslant 5-x^2$,

j) $\dfrac{x^2+\sqrt{x-1}+3}{2-x^2}>0$.

VII. Funkcja wykładnicza

Ustalmy $a \in (0,1) \cup (1,+\infty)$. Funkcję $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ określoną wzorem

$$f(x) = a^x, \quad x \in \mathbb{R}$$

nazywamy funkcją wykładniczą o podstawie a. Funkcja wykładnicza ma wartości dodatnie. Jeśli $a \in (0,1)$, to f jest malejąca. Jeśli $a \in (1,+\infty)$, to f jest rosnąca.

22. Rozwiązać równania i nierówności:

a) $2^{x-4} = (\sqrt{2})^{2-3x}$, **b**) $\left(\frac{4}{9}\right)^x \cdot \left(\frac{27}{8}\right)^{x-1} = \frac{2}{3}$, **c**) $4^x - 9 \cdot 2^x + 8 = 0$,

d) $4^{x+\sqrt{x^2-2}} - 5 \cdot 2^{x-1+\sqrt{x^2-2}} = 6$, **e**) $3^{x+4} < 3^{1-x}$,

f) $\left(\frac{1}{7}\right)^{3x} < 1$, **g**) $3^{3x} \cdot 27 > \frac{1}{3}$, **h**) $\frac{1}{2^{x^2}} \cdot 4^{x+1} < \frac{1}{64}$,

i) $x^{\frac{3}{4}x} < (\sqrt{x})^{x^2-x+1}$, **j**) $\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1-x}{|x|}} \leqslant 1$.

23. Rozwiązać układy równań:

a) $\begin{cases} 8^{2x+1} = 32 \cdot 2^{4y-1} \\ 5 \cdot 5^{x-y} = \sqrt{25^{2y+1}} \end{cases}$, **b**) $\begin{cases} \sqrt[x-y]{x+y} = 2\sqrt{3} \\ (x+y)2^{y-x} = 3 \end{cases}$.

VIII. Funkcja logarytmiczna

Logarytm. Logarytmem przy dodatniej i różnej od jeden podstawie a z liczby dodatniej x nazywamy liczbę rzeczywistą c będącą wykładnikiem potęgi do której należy podnieść a, żeby otrzymać x, tzn.

$$\log_a x = c \overset{def}{\Leftrightarrow} a^c = x, \quad a > 0, \quad a \neq 1, \quad x > 0, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Logarytm dziesiętny. $\log \overset{def}{=} \log_{10}$.

Jeśli $a, b > 0$, $a, b \neq 1$, $x, y > 0$, $\alpha \in \mathbb{R}$, to:

$$\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y,$$

$$\log_a \left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y,$$

$$\log_a x^\alpha = \alpha \log_a x,$$

$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a},$$

$$\log_a b = \frac{1}{\log_b a},$$

$$\log_a a = 1,$$

$$\log_a 1 = 0.$$

Funkcja logarytmiczna. Ustalmy $a \in (0,1) \cup (1,+\infty)$. Funkcję $f\colon (0,+\infty) \to \mathbb{R}$ określoną wzorem

$$f(x) = \log_a x, \quad x > 0$$

nazywamy funkcją logarytmiczną o podstawie a. Jeśli $a \in (0,1)$, to f jest malejąca. Jeśli $a \in (1,+\infty)$, to f jest rosnąca.

Niech $a > 0$, $a \neq 1$. Funkcja wykładnicza o podstawie a i funkcja logarytmiczna o podstawie a są funkcjami wzajemnie odwrotnymi, tzn.

$$\log_a a^x = x, \quad x \in \mathbb{R},$$

$$a^{\log_a x} = x, \quad x > 0.$$

24. Obliczyć:

a) $\log_{10} \frac{1}{100}$, **b**) $\log_{\frac{1}{3}} 27$, **c**) $\log_{\frac{1}{9}} 3\sqrt{3}$, **d**) $\log_{\sqrt{2}} 1$, **e**) $\log_3 \frac{1}{27}$,

f) $\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{8}$, **g**) $\log_{\frac{1}{8}} \frac{1}{2}$, **h**) $\log_{\sqrt{2}} 8$, **i**) $\log_{\frac{\sqrt{2}}{2}} 8$, **j**) $\log_{\frac{1}{5}} \frac{1}{5}$,

k) $\log_7 7\sqrt{7}$, **l**) $\log_{\frac{1}{2}} 4$, **m**) $\log_{3\sqrt{3}} 27$, **n**) $\log_{\frac{1}{9}} 3\sqrt{3}$, **o**) $\log_6 36$,

p) $4^{\log_2 3}$, **q**) $10^{2+2\log 7}$, **r**) $10 \cdot 10^{\frac{1}{2}\log 9 - \log 2}$,

s) $4^{\frac{1}{2}\log_2 3 + 3\log_8 5}$, **t**) $343^{1-2\log_{49} 13}$.

25. Rozwiązać równania i nierówności:

a) $\log_2(x+2) = \log_2(2-x)$, **b**) $\log_3(x+4) = 1 + \log_3 x$,

c) $\log(x-2) - \log(4-x) = 1 - \log(13-x)$, **d**) $\log_9 \frac{2x}{x+1} \geqslant \frac{1}{2}$,

e) $\log_{0,2}(x^2-4) \geqslant -1$, **f**) $\log_{2x+3} x^2 < 1$, **g**) $|3 - \log_2 x| < 1$,

h) $\log\left|\frac{x-1}{2x+1}\right| > 1$, **i**) $3^{\log_3(x^2-5x+7)} < 1$, **j**) $4^{\log_5(3x^2-3x+1)} > 1$.

26. Rozwiązać układy równań:

a) $\begin{cases} \log x - \log y = 7 \\ \log x + \log y = 5 \end{cases}$, **b**) $\begin{cases} 2\log x - \log y = \log 9 \\ 10^{y-x} = \frac{1}{100} \end{cases}$,

c) $\begin{cases} x^{\log y} = 100 \\ \log_y x = 2 \end{cases}$.

IX. Funkcje trygonometryczne

Funkcje trygonometryczne kąta skierowanego. Niech α będzie miarą stopniową kąta skierowanego XOP o wierzchołku w początku układu współrzędnych $O = (0,0)$ oraz ramieniu początkowym OX i końcowym OP, gdzie $P = (x,y) \neq (0,0)$. Oznaczmy przez r odległość punktu P od początku układu współrzędnych. Wówczas:

$$\sin\alpha \overset{def}{=} \frac{y}{r},$$

$$\cos\alpha \overset{def}{=} \frac{x}{r},$$

$$\operatorname{tg}\alpha \overset{def}{=} \frac{y}{x}, \quad x \neq 0 \Leftrightarrow \alpha \neq 90^\circ + k \cdot 180^\circ, \quad k \in \mathbb{Z},$$

$$\operatorname{ctg}\alpha \overset{def}{=} \frac{x}{y}, \quad y \neq 0 \Leftrightarrow \alpha \neq k \cdot 180^\circ, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Miara łukowa kąta skierowanego. Miarą łukową kąta środkowego okręgu o promieniu r opartego na łuku o długości l nazywamy liczbę

$$x \overset{def}{=} \frac{l}{r}.$$

Kąt o mierze łukowej jeden nazywamy radianem.

Jeśli x jest miarą łukową kąta wyrażoną w radianach, a α jest miarą stopniową kąta wyrażoną w stopniach, to:

$$x = \frac{\pi}{180^\circ} \cdot \alpha,$$

$$\alpha = \frac{180^\circ}{\pi} \cdot x.$$

Ponadto

$$1 \text{ rad} \approx 57^\circ 17' 45'',$$

$$1^\circ \approx 0,017453 \text{ rad}.$$

Funkcje trygonometryczne zmiennej rzeczywistej

$$\sin x \overset{def}{=} \sin\left(\frac{180^\circ}{\pi} \cdot x\right), \quad x \in \mathbb{R}$$

$$\sin x \in [-1,1], \quad \sin(-x) = -\sin x, \quad \sin(x + k \cdot 2\pi) = \sin x, \quad x \in \mathbb{R}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\cos x \overset{def}{=} \cos\left(\frac{180^\circ}{\pi} \cdot x\right), \quad x \in \mathbb{R}$$

$$\cos x \in [-1,1], \quad \cos(-x) = \cos x, \quad \cos(x + k \cdot 2\pi) = \cos x, \quad x \in \mathbb{R}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\operatorname{tg} x \overset{def}{=} \operatorname{tg}\left(\frac{180^\circ}{\pi} \cdot x\right), \quad x \in D_{\operatorname{tg}} \overset{def}{=} \left\{x \in \mathbb{R} : x \neq (2k+1) \cdot \frac{\pi}{2}, \quad k \in \mathbb{Z}\right\}$$

$$\operatorname{tg} x \in \mathbb{R}, \quad \operatorname{tg}(-x) = -\operatorname{tg} x, \quad \operatorname{tg}(x + k \cdot \pi) = \operatorname{tg} x, \quad x \in D_{\operatorname{tg}}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\operatorname{ctg} x \overset{def}{=} \operatorname{ctg}\left(\frac{180^\circ}{\pi} \cdot x\right), \quad x \in D_{\operatorname{ctg}} \overset{def}{=} \{x \in \mathbb{R} : x \neq k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}\}$$

$$\operatorname{ctg} x \in \mathbb{R}, \quad \operatorname{ctg}(-x) = -\operatorname{ctg} x, \quad \operatorname{ctg}(x + k \cdot \pi) = \operatorname{ctg} x, \quad x \in D_{\operatorname{ctg}}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

Znaki funkcji trygonometrycznych

x	$\sin x$	$\cos x$	$\operatorname{tg} x$	$\operatorname{ctg} x$
$\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$	$+$	$+$	$+$	$+$
$\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$	$+$	$-$	$-$	$-$
$\left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$	$-$	$-$	$+$	$+$
$\left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$	$-$	$+$	$-$	$-$

Wartości funkcji trygonometrycznych ($*$ oznacza, że dana wartość nie istnieje)

x	$\sin x$	$\cos x$	$\operatorname{tg} x$	$\operatorname{ctg} x$
0	0	1	0	$*$
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
$\frac{\pi}{2}$	1	0	$*$	0
π	0	-1	0	$*$
$\frac{3\pi}{2}$	-1	0	$*$	0
2π	0	1	0	$*$

Wzory redukcyjne

$$\begin{array}{lll}
\sin(\pi - x) = \sin x & \sin(\pi + x) = -\sin x & \sin(2\pi - x) = -\sin x \\
\cos(\pi - x) = -\cos x & \cos(\pi + x) = -\cos x & \cos(2\pi - x) = \cos x \\
\operatorname{tg}(\pi - x) = -\operatorname{tg} x & \operatorname{tg}(\pi + x) = \operatorname{tg} x & \operatorname{tg}(2\pi - x) = -\operatorname{tg} x \\
\operatorname{ctg}(\pi - x) = -\operatorname{ctg} x & \operatorname{ctg}(\pi + x) = \operatorname{ctg} x & \operatorname{ctg}(2\pi - x) = -\operatorname{ctg} x
\end{array}$$

$$\begin{array}{ll}
\sin(\frac{\pi}{2} - x) = \cos x & \sin(\frac{\pi}{2} + x) = \cos x \\
\cos(\frac{\pi}{2} - x) = \sin x & \cos(\frac{\pi}{2} + x) = -\sin x \\
\operatorname{tg}(\frac{\pi}{2} - x) = \operatorname{ctg} x & \operatorname{tg}(\frac{\pi}{2} + x) = -\operatorname{ctg} x \\
\operatorname{ctg}(\frac{\pi}{2} - x) = \operatorname{tg} x & \operatorname{ctg}(\frac{\pi}{2} + x) = -\operatorname{tg} x
\end{array}$$

$$\begin{array}{ll}
\sin(\frac{3\pi}{2} - x) = -\cos x & \sin(\frac{3\pi}{2} + x) = -\cos x \\
\cos(\frac{3\pi}{2} - x) = -\sin x & \cos(\frac{3\pi}{2} + x) = \sin x \\
\operatorname{tg}(\frac{3\pi}{2} - x) = \operatorname{ctg} x & \operatorname{tg}(\frac{3\pi}{2} + x) = -\operatorname{ctg} x \\
\operatorname{ctg}(\frac{3\pi}{2} - x) = \operatorname{tg} x & \operatorname{ctg}(\frac{3\pi}{2} + x) = -\operatorname{tg} x
\end{array}$$

Tożsamości trygonometryczne

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$$

$$\operatorname{tg} x = \tfrac{\sin x}{\cos x} \quad \operatorname{ctg} x = \tfrac{\cos x}{\sin x}$$
$$\operatorname{tg} x \operatorname{ctg} x = 1$$

$\sin 2x = 2\cos x \sin x$

$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$

$\operatorname{tg} 2x = \frac{2\operatorname{tg} x}{1-\operatorname{tg}^2 x}$

$\operatorname{ctg} 2x = \frac{\operatorname{ctg}^2 x - 1}{2\operatorname{ctg} x}$

$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$

$\sin(x-y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y$

$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$

$\cos(x-y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$

$\operatorname{tg}(x+y) = \frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y}{1-\operatorname{tg} x \operatorname{tg} y}$

$\operatorname{tg}(x-y) = \frac{\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y}{1+\operatorname{tg} x \operatorname{tg} y}$

$\operatorname{ctg}(x+y) = \frac{\operatorname{ctg} x \operatorname{ctg} y - 1}{\operatorname{ctg} x + \operatorname{ctg} y}$

$\operatorname{ctg}(x-y) = -\frac{\operatorname{ctg} x \operatorname{ctg} y + 1}{\operatorname{ctg} x - \operatorname{ctg} y}$

$\sin x + \sin y = 2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$

$\sin x - \sin y = 2\sin\frac{x-y}{2}\cos\frac{x+y}{2}$

$\cos x + \cos y = 2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$

$\cos x - \cos y = -2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}$

$\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = \frac{\sin(x+y)}{\cos x \cos y}$

$\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y = \frac{\sin(x-y)}{\cos x \cos y}$

$\operatorname{ctg} x + \operatorname{tg} y = \frac{\sin(x+y)}{\sin x \sin y}$

$\operatorname{ctg} x - \operatorname{ctg} y = -\frac{\sin(x-y)}{\sin x \sin y}$

Równania trygonometryczne

$$\sin x = \sin\alpha \Leftrightarrow x = \alpha + 2k\pi \vee x = \pi - \alpha + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

$$\cos x = \cos\alpha \Leftrightarrow x = \alpha + 2k\pi \vee x = 2\pi - \alpha + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

$$\operatorname{tg} x = \operatorname{tg}\alpha \Leftrightarrow x = \alpha + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad \alpha \in D_{\operatorname{tg}}$$

$$\operatorname{ctg} x = \operatorname{ctg}\alpha \Leftrightarrow x = \alpha + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad \alpha \in D_{\operatorname{ctg}}$$

$$\sin x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\sin x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\sin x = -1 \Leftrightarrow x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\cos x = 0 \Leftrightarrow x = (2k+1)\cdot\frac{\pi}{2}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\cos x = 1 \Leftrightarrow x = 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\cos x = -1 \Leftrightarrow x = \pi + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\operatorname{tg} x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\operatorname{ctg} x = 0 \Leftrightarrow x = (2k+1)\cdot\frac{\pi}{2}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

27. Obliczyć

$$\sin x, \quad \cos x, \quad \operatorname{tg} x, \quad \operatorname{ctg} x,$$

jeśli

$$\textbf{a)}\ x = \frac{2\pi}{3}, \quad \textbf{b)}\ x = \frac{7\pi}{6}, \quad \textbf{c)}\ x = \frac{7\pi}{4}, \quad \textbf{d)}\ x = -\frac{5\pi}{6},$$

$$\textbf{e)}\ x = -\frac{4\pi}{3}, \quad \textbf{f)}\ x = -\frac{5\pi}{3}, \quad \textbf{g)}\ x = \frac{2009\pi}{6}, \quad \textbf{h)}\ x = -\frac{2009\pi}{4},$$

$$\textbf{i)}\ x = \frac{53\pi}{4}, \quad \textbf{j)}\ x = -\frac{55\pi}{6}.$$

28. Obliczyć

$$\textbf{a)}\ \sin x, \text{ jeśli } \cos x = -\frac{1}{9} \text{ i } x \in \left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right),$$

$$\textbf{b)}\ \sin x, \text{ jeśli } \operatorname{tg} x = \frac{8}{15} \text{ i } x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right),$$

$$\textbf{c)}\ \sin x, \text{ jeśli } \operatorname{ctg} x = -\frac{3}{4} \text{ i } x \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right),$$

$$\textbf{d)}\ \cos x, \text{ jeśli } \sin x = -\frac{1}{3} \text{ i } x \in \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right),$$

$$\textbf{e)}\ \cos x, \text{ jeśli } \operatorname{tg} x = -2 \text{ i } x \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right),$$

$$\textbf{f)}\ \cos x, \text{ jeśli } \operatorname{ctg} x = -2 \text{ i } x \in \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right),$$

$$\textbf{g)}\ \operatorname{tg} x, \text{ jeśli } \sin x = -\frac{3}{5} \text{ i } x \in \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right),$$

$$\textbf{h)}\ \operatorname{tg} x, \text{ jeśli } \cos x = \frac{3}{5} \text{ i } x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right),$$

$$\textbf{i)}\ \operatorname{ctg} x, \text{ jeśli } \sin x = -\frac{5}{13} \text{ i } x \in \left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right),$$

$$\textbf{j)}\ \operatorname{ctg} x, \text{ jeśli } \cos x = -\frac{15}{17} \text{ i } x \in \left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right).$$

29. Obliczyć:

$$\textbf{a)}\ \sin^2 50^\circ + \sin^2 40^\circ, \quad \textbf{b)}\ \operatorname{tg} 40^\circ \operatorname{tg} 45^\circ \operatorname{tg} 50^\circ,$$

$$\textbf{c)}\ \sin 12^\circ \cos 18^\circ + \sin 18^\circ \cos 12^\circ,$$

$$\textbf{d)}\ \frac{(1 - 2\sin^2 10^\circ)\cos 70^\circ}{2\cos^2 25^\circ - 1}, \quad \textbf{e)}\ \frac{\operatorname{tg} 85^\circ - \operatorname{tg} 25^\circ}{1 + \operatorname{tg} 85^\circ \operatorname{tg} 25^\circ}.$$

30. Udowodnić, że:

$$\textbf{a)}\ \cos^4 x - \sin^4 x = \cos 2x, \quad \textbf{b)}\ \operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x = \frac{2}{\sin 2x},$$

c) $1-\operatorname{tg}^2 x = \dfrac{\cos 2x}{\cos^2 x}$, **d**) $\dfrac{\sin x + \sin 2x}{1+\cos x + \cos 2x} = \operatorname{tg} x$,

e) $\dfrac{\cos x - \cos 3x}{\sin 3x - \sin x} = \operatorname{tg} 2x$.

31. Rozwiązać równania i nierówności:

a) $\sin x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, **b**) $\cos x = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, **c**) $\operatorname{tg} x = -1$, **d**) $\operatorname{ctg} x = 1$,

e) $\sin\left(2x + \dfrac{\pi}{6}\right) = -\dfrac{1}{2}$, **f**) $\cos 6x = \dfrac{1}{2}$, **g**) $\operatorname{tg} 3x = \sqrt{3}$,

h) $\operatorname{ctg}\left(\dfrac{x}{2} - \dfrac{\pi}{3}\right) = -\sqrt{3}$, **i**) $\sin x + \cos x = -1$, **j**) $\sin x + \cos x = 1$,

k) $2\cos^2 x = 3\cos x + 2$, **l**) $\operatorname{tg} x - \sin x + \cos x = 1$,

m) $\operatorname{ctg} x - \cos x = \dfrac{1-\sin x}{2\sin x}$, **n**) $\dfrac{\sqrt{3}+\operatorname{tg} x}{1-\sqrt{3}\operatorname{tg} x} = 1$, **o**) $\sin x < -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$,

p) $\cos x \geqslant \dfrac{1}{2}$, **q**) $\operatorname{tg} x \leqslant 1$, **r**) $\operatorname{ctg} x > -\dfrac{\sqrt{3}}{3}$,

s) $\sin x - \sqrt{3}\cos x > 1$, **t**) $\dfrac{\cos 2x}{\cos x} < 1$.

Literatura

[1] B. Gdowski, E. Pluciński, *Zadania i testy z matematyki dla uczniów szkół średnich. Klasa I i II*, WNT, Warszawa 1995.

[2] B. Gdowski, E. Pluciński, *Zadania i testy z matematyki dla uczniów szkół średnich. Klasa III i IV*, WNT, Warszawa 1996.

[3] B. Gdowski, E. Pluciński, *Zbiór zadań z matematyki dla kandydatów na wyższe uczelnie techniczne*, WNT, Warszawa 1971.

[4] R. Leitner, W. Żakowski, *Matematyka dla kandydatów na wyższe uczelnie techniczne. Część I*, WNT, Warszawa 1980.

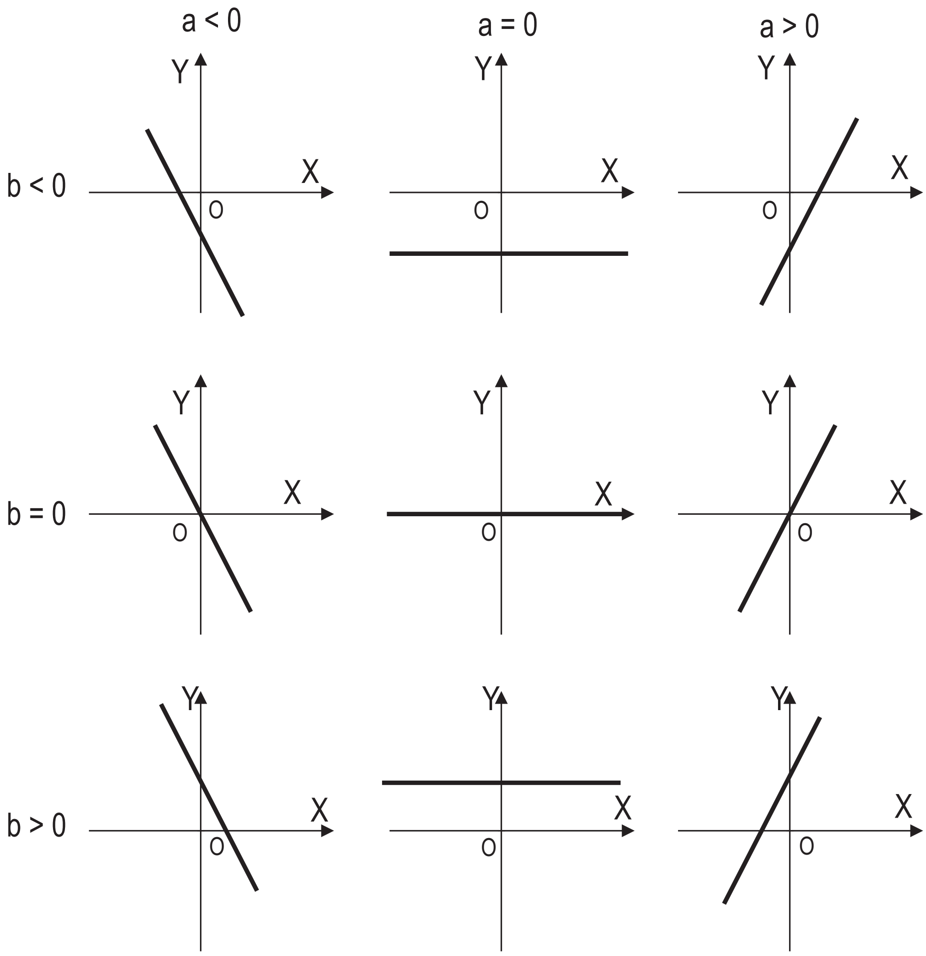
[5] R. Leitner, W. Żakowski, *Matematyka dla kandydatów na wyższe uczelnie techniczne. Część II*, WNT, Warszawa 1978.

[6] W. Leksiński, B. Macukow, W. Żakowski, *Matematyka dla maturzystów. Definicje, twierdzenia, wzory, przykłady*, WNT, Warszawa 1991.

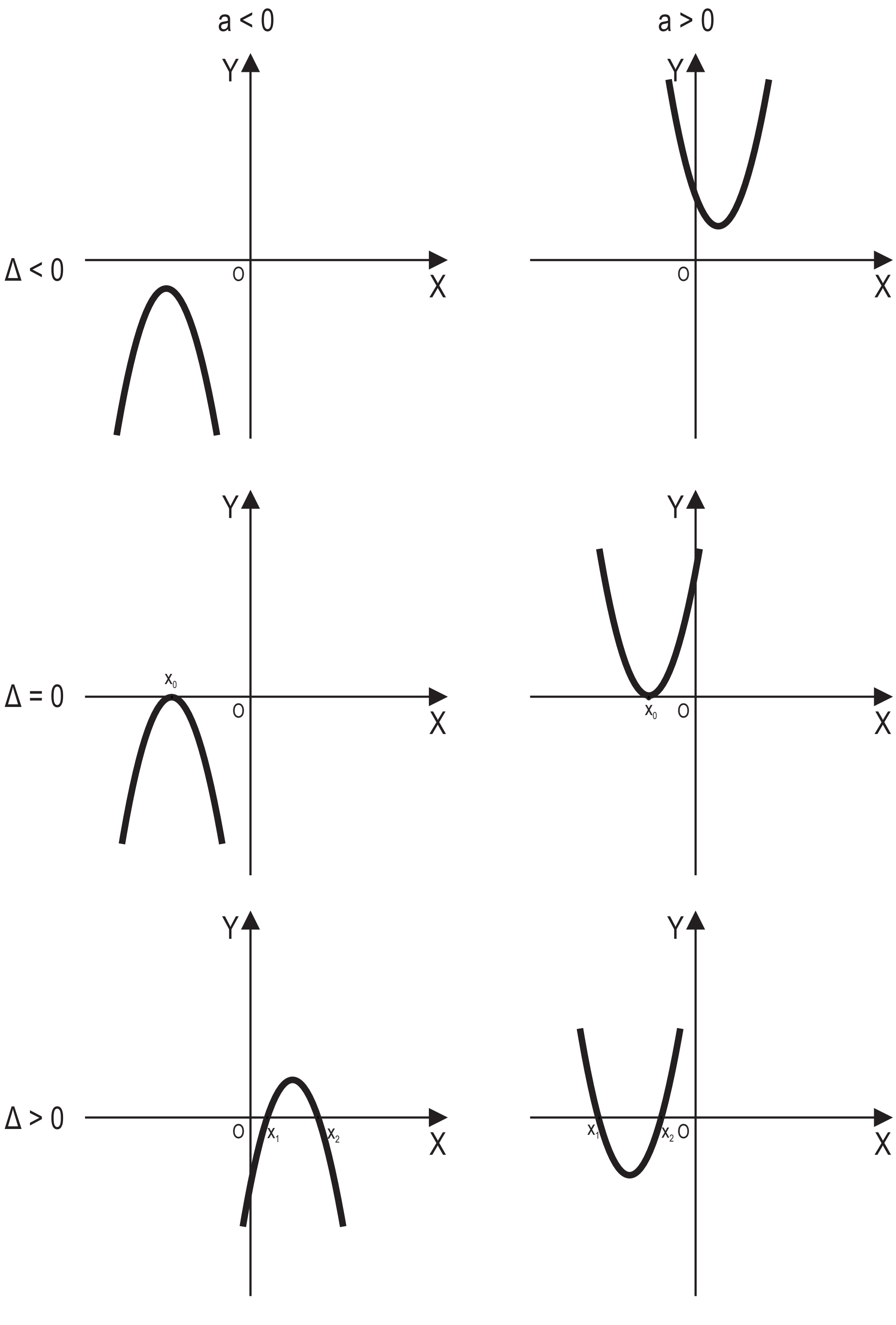
[7] W. Leksiński, B. Macukow, W. Żakowski, *Matematyka dla maturzystów. Zadania*, WNT, Warszawa 1994.

[8] J. Nikodem, K. Nikodem, *Matematyka*, Park, Bielsko-Biała 2005.

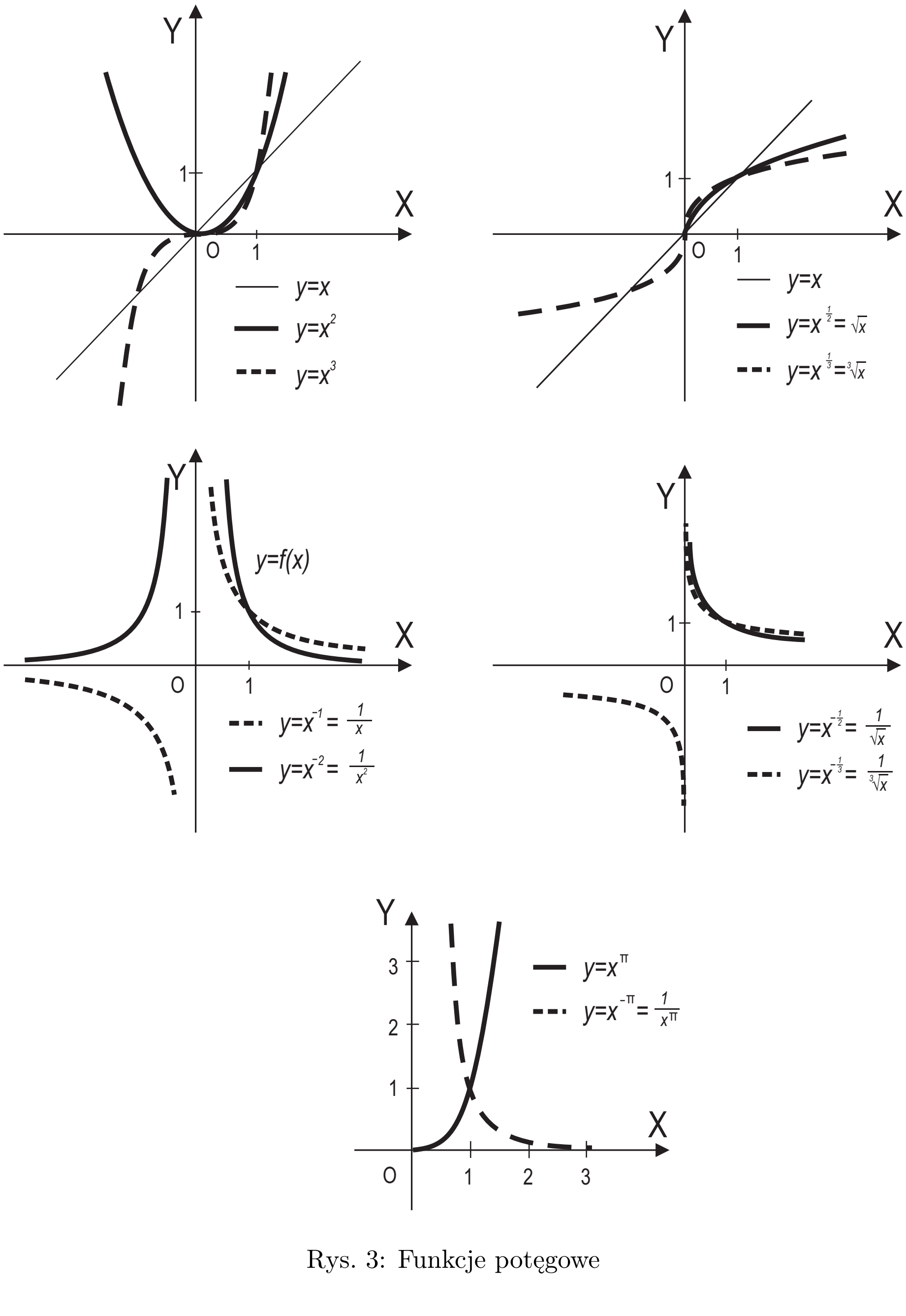
[9] T. Zgraja, *Matematyka dla studentów kierunków: budownictwo, inżynieria materiałowa i inżynieria środowiska. Część pierwsza*, Wydawnictwo Naukowe ATH, Bielsko-Biała 2017.



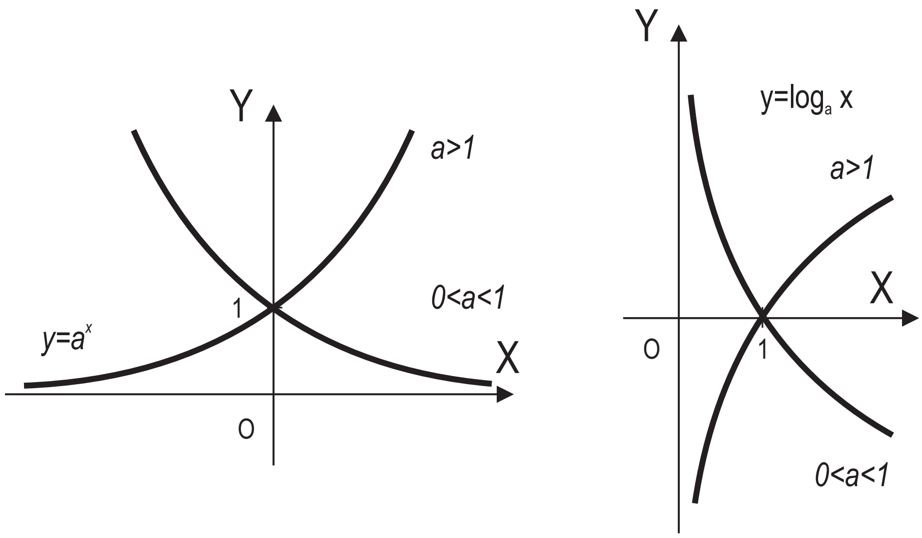
Rys. 1: Funkcje liniowe $f(x) = ax + b$



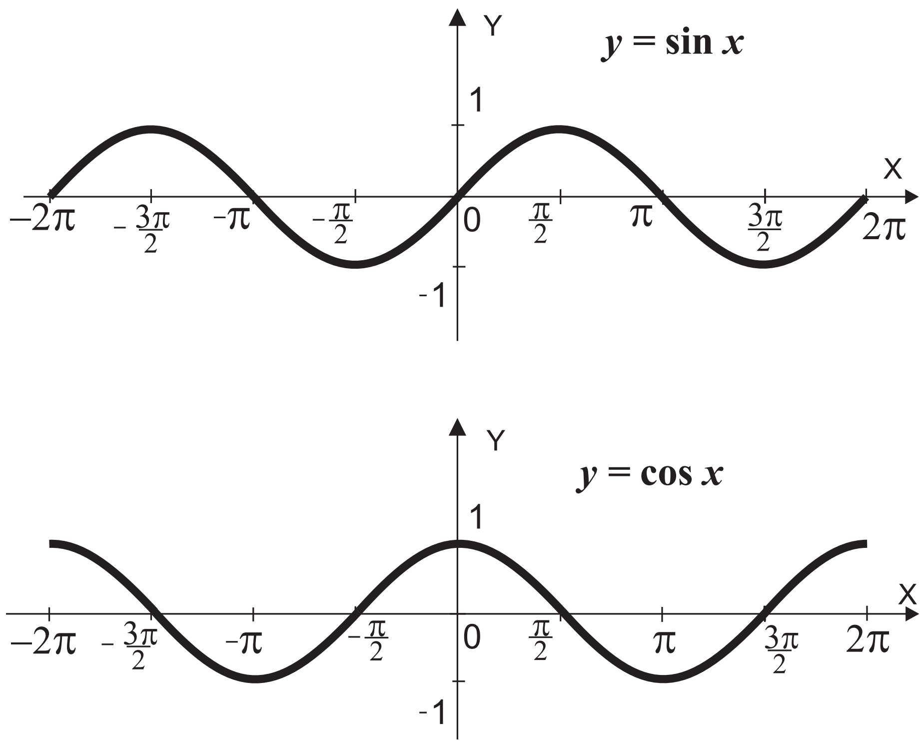
Rys. 2: Funkcje kwadratowe $f(x) = ax^2 + bx + c$



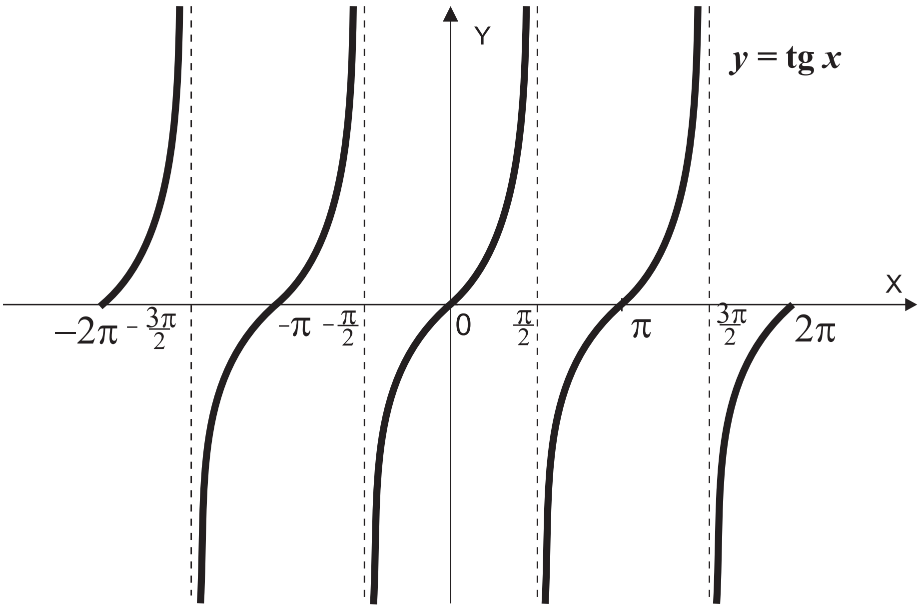
Rys. 3: Funkcje potęgowe

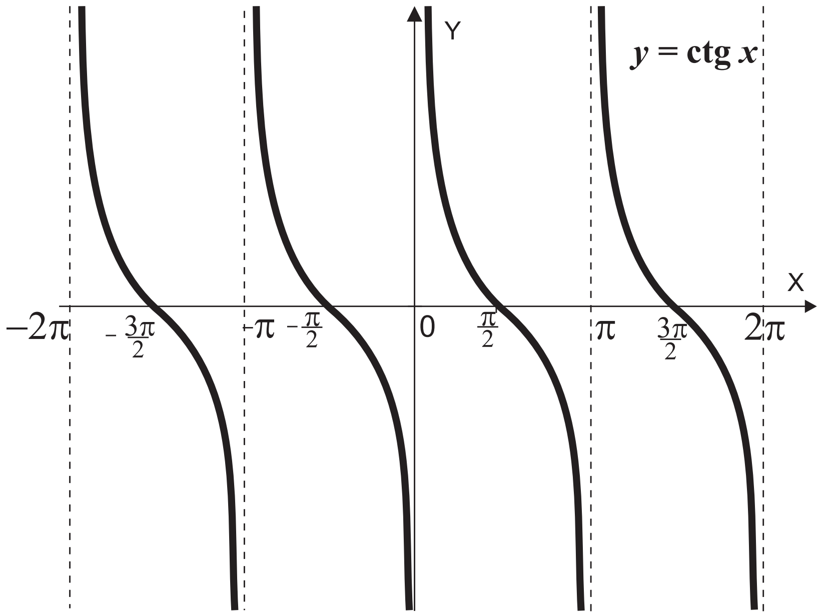


Rys. 4: Funkcja wykładnicza i funkcja logarytmiczna



Rys. 5: Sinus i cosinus





Rys. 6: Tangens i cotangens